



## Книготорговая компания ООО «Лань-Трейд»

192029, г. Санкт-Петербург, ул. Крупской, д. 13  
(812) 412-85-78, 412-85-91, root@lanpbl.spb.ru, www.lanbook.ru

ИНН 7801220018, КПП 780101001, р/с 40702810136060007559  
в Филиале № 7806 ВТБ 24 (ЗАО) г. Санкт-Петербург  
к/с 30101810300000000811, БИК 044030811  
ОГРН 1027800515885, ОКПО 59440846, ОКВЭД 51.47.21, 51.43.22



**Болотюк В. А., Болотюк Л. А., Галич Ю. Г., Гателюк О. В., Окишев С. В., Швед Е. А.**

**Практикум и индивидуальные задания по интегральному исчислению функции одной переменной ( типовые расчеты):**

**Учебное пособие. 1-е изд.**

**ISBN 978-5-8114-1287-7**

**Год выпуска 2012**

**Тираж 1000 экз.**

**Формат 12,8×20 см**

**Переплет: твердый**

**Страниц 352**

**Цена 650,10 руб.**

Настоящий практикум представляет собой сборник индивидуальных заданий (типовых расчетов) из курса высшей математики по теме «Неопределенный и определенный интегралы». Излагаемые основные понятия и методы интегрирования сопровождаются большим количеством примеров с подробными решениями. Первая глава практикума содержит индивидуальные задания по следующим разделам: простейшие правила интегрирования, интегрирование методом замены переменной, интегрирование по частям, интегрирование рациональных дробей, интегрирование тригонометрических функций, интегрирование иррациональных функций. Вторая глава посвящена определенному интегралу: вычисление определенного интеграла с помощью формулы Ньютона–Лейбница, замена переменной в определенном интеграле, интегрирование по частям в определенном интеграле, вычисление несобственных интегралов, приложения определенного интеграла (вычисление площади плоской фигуры, вычисление длины дуги плоской кривой, вычисление площади поверхности и объема тела вращения, вычисление статистических моментов и координат центра масс плоской кривой, а также приложения интегралов к решению некоторых задач физики). Типовые расчеты включают по 30 вариантов. Каждый вариант состоит из семи заданий, а каждое задание представлено тремя уровнями сложности. Всего практикум содержит 3330 интегралов.

Для студентов и преподавателей технических, экономических, аграрных и других вузов. Практикум также может быть использован учителями для проведения дополнительных занятий со школьниками.

### **Введение**

Математика играет важную роль в инженерно-технических и экономических исследованиях. В начале обучения студенты технических и экономических вузов изучают курс высшей математики, который является фундаментом высшего образования. Профессиональный уровень инженера и экономиста зависит от того, умеет ли он применять математический аппарат для решения конкретных задач.

Одними из важнейших понятий курса высшей математики являются понятия неопределенного и определенного интегралов. Усвоению данных понятий и посвящено данное учебно-практическое пособие. Изложение материала проведено без доказательств — основной упор сделан на приобретение навыков интегрирования. Книга состоит из двух глав, задач для самоконтроля, ответов и указаний к задачам для самоконтроля и приложения. Каждая глава содержит теоретическую часть, сопровождающуюся большим количеством примеров и рисунков, вопросы для самоконтроля и варианты индивидуальных заданий. Первая глава посвящена понятию неопределенного интеграла, стандартным методам интегрирования, интегрированию рациональных, тригонометрических и иррациональных функций. Для удобства основные замены переменных, рекомендуемые подстановки в неопределенном интеграле сведены в таблицы — одна из особенностей данной книги. Вторая глава посвящена определенному интегралу, стандартным методам интегрирования определенного интеграла, несобственным интегралам и приложениям определенного интеграла.

Каждый типовой расчет содержит 7 заданий. Задания состоят из трех уровней сложности, при этом предполагается, что 1-й уровень соответствует оценке «удовлетворительно», 2-й уровень — оценке «хорошо», 3-й уровень — оценке «отлично». На каждом уровне предлагается от двух до четырех интегралов, в зависимости от типа задания. Студент может самостоятельно оценить свои возможности и выбрать для себя тот уровень целей, который соответствует его возможностям и потребностям в данный момент времени. При возможности и возникшем интересе студент может перейти на более высокие уровни.

Первый типовой расчет «Неопределенный интеграл» включает следующие задания: вычисление интегралов непосредственным интегрированием; вычисление интегралов, используя метод линейной замены; вычисление интегралов, используя метод замены переменной; вычисление интегралов, используя метод интегрирования по частям; вычисление интегралов от рациональных дробей; вычисление интегралов от тригонометрических функций и вычисление интегралов от иррациональных функций. Всего первый типовой расчет включает 1890 интегралов.

Второй типовой расчет «Определенный интеграл» включает задания: вычисление определенного интеграла; вычисление несобственного интеграла; вычисление площади фигуры, ограниченной линиями; вычисление длины дуги кривой (2-й и 3-й уровни); вычисление площади поверхности вращения; вычисление объема тела вращения и дополнительное задание на нахождение статических моментов и координат центра масс плоских кривых (2-й и 3-й уровни). Во втором типовом расчете — 1230 интегралов. Варианты типовых расчетов могут быть использованы преподавателями как варианты самостоятельных или контрольных работ.

Задачи для самоконтроля включают в себя 30 вариантов по 7 задач в каждом (всего 210 интегралов). Задачи вариантов не повторяются. В каждом варианте представлены задачи на замену переменной, интегрирование по частям, интегралы с квадратным трехчленом в знаменателе, интегрирование рациональных дробей, тригонометрических функций и иррациональных выражений. Наиболее интересными по разнообразию методов интегрирования являются, на наш взгляд, задачи 6 и 7, где представлены простейшие преобразования подынтегральных выражений; тригонометрические подстановки; интегралы от квадратичных иррациональностей в числителе или знаменателе дроби, умноженной на многочлен (разложение с корнем в числителе) или (разложение с корнем в знаменателе); рациональные подстановки типа  $x = ts$ ; прием домножения на сопряженное выражение; интегралы от дифференциального бинома (преобладает второй случай бинома: целое).

Так как сложность перечисленных задач различна, то в вариантах приведено по две задачи на интегрирование иррациональностей. При этом простота одной из них уравнивается относительной сложностью другой. Весовые коэффициенты сложности задач вводятся в соотношении: 2 : 2 : 1 : 3 : 2 : 2, т. е. наибольший балл дается за самую трудоемкую задачу интегрирования дробно-рациональной функции разложением на простейшие дроби. Задачи для самоконтроля могут быть использованы как варианты итоговой контрольной работы по теме «Неопределенный интеграл».

Приложения в конце книги содержат таблицу некоторых «неберущихся» интегралов, наиболее часто встречающихся при решении задач, и примеры некоторых кривых. Вопросы для самоконтроля могут быть использованы как преподавателями для составления экзаменационных билетов и контрольных заданий, так и студентами для подготовки к экзамену или зачету.

Учебно-практическое пособие написано в соответствии с действующей программой по курсу математики.

Авторы выражают благодарность доценту Т. А. Филимоновой за ценные советы по содержанию данного учебного пособия.

Болотюк В. А., Болотюк Л. А., Галич Ю. Г., Гателюк О. В., Окишев С. В., Швед Е. А.

Практикум и индивидуальные задания по интегральному исчислению функции одной переменной ( типовые расчеты):

Учебное пособие. 1-е изд.

## Оглавление

[Введение ..... 3](#)

[Глава первая. Неопределенный интеграл ..... 6](#)

1.1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла ..... 6

1.2. Таблица основных неопределенных интегралов ..... 8

1.3. Простейшие правила интегрирования ..... 9

1.4. Стандартные методы интегрирования ..... 10

1.4.1. Интегрирование методом замены переменной ..... 10

1.4.2. Интегрирование по частям ..... 17

1.5. Интегрирование рациональных дробей ..... 22

1.6. Интегрирование тригонометрических функций ..... 29

1.7. Интегрирование иррациональных функций ..... 35

1.8. Заключительные замечания ..... 45

1.9. Вопросы для самоконтроля ..... 46

1.10. Варианты типового расчета «Неопределенный интеграл» ..... 47

[Глава вторая. Определенный интеграл ..... 136](#)

2.1. Задача о площади криволинейной трапеции ..... 136

2.2. Понятие определенного интеграла ..... 137

2.3. Определенный интеграл как функция верхнего предела ..... 139

2.4. Вычисление определенного интеграла с помощью формулы Ньютона — Лейбница ..... 139

2.5. Основные свойства определенного интеграла ..... 141

2.6. Замена переменной в определенном интеграле ..... 142

2.7. Интегрирование по частям в определенном интеграле .....	145
2.8. Несобственные интегралы .....	146
2.8.1. Интегралы с бесконечными пределами (несобственные интегралы I рода) .....	146
2.8.2. Интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы II рода) .....	149
2.9. Вычисление площади плоской фигуры .....	152
2.9.1. Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций .....	152
2.9.2. Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически .....	154
2.9.3. Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах .....	157
2.10. Вычисление длины дуги плоской кривой .....	160
2.10.1. Длина дуги плоской кривой, заданной уравнением в прямоугольных координатах .....	160
2.10.2. Длина дуги плоской кривой, заданной параметрически .....	161
2.10.3. Длина дуги плоской кривой, заданной в полярных координатах .....	162
2.11. Вычисление площади поверхности и объема тела вращения .....	163
2.11.1. Вычисление площади поверхности вращения, если функция задана в прямоугольных координатах .....	163
2.11.2. Вычисление площади поверхности вращения, если функция задана параметрически .....	165
2.11.3. Вычисление площади поверхности вращения, если функция задана в полярных координатах .....	166
2.11.4. Вычисление объема тела .....	167
2.12. Физические приложения определенного интеграла .....	174
2.13. Вопросы для самоконтроля .....	188
2.14. Варианты типового расчета «Определенный интеграл» .....	190
2.15. Заключительные замечания .....	279
<a href="#">Задачи для самоконтроля .....</a>	<a href="#">281</a>
<a href="#">Ответы и указания к задачам для самоконтроля .....</a>	<a href="#">289</a>
<a href="#">Приложение 1. Некоторые «неберущиеся» интегралы .....</a>	<a href="#">311</a>
<a href="#">Приложение 2 Примеры некоторых кривых .....</a>	<a href="#">313</a>
<a href="#">Литература .....</a>	<a href="#">315</a>

---