



**Алдошин Г. Т.**  
**Теория линейных и нелинейных колебаний:**  
**Учебное пособие. 2-е изд., стер.**

*Рекомендовано НМС по теоретической механике в качестве учебного пособия для студентов и аспирантов физико-технических высших учебных заведений*

**ISBN 978-5-8114-1460-4**

**Год выпуска 2013**

**Тираж 1000 экз.**

**Формат 12,8×20 см**

**Переплет: твердый**

**Страниц 320**

**Цена 749,98 руб.**

Пособие состоит из двух частей. В первой излагается теория линейных колебаний систем с конечным числом степеней свободы. Наряду с вопросами, входящими в программы дополнительных глав теоретической механики рассмотрены колебания молекул, цепочки осцилляторов, параметрические колебания и сведения из устойчивости движения. Вторая часть посвящена нелинейным колебаниям. Изложены качественные методы анализа нелинейных колебаний и приближённые методы их расчёта. Рассмотрены автоколебания в системах с одной степенью свободы, фрикционные и релаксационные колебания. Приведены сведения о стохастических автоколебаниях.

Для студентов и аспирантов физико-технических вузов. Может быть полезно инженерам и научным работникам, занимающимся расчётами и исследованиями колебательных систем и процессов.

**Рецензенты:**

*А. А. Тихонов* — доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета; *В. И. Поляков* — доктор технических наук, профессор кафедры теоретической механики Санкт-Петербургского государственного морского технического университета.

**Предисловие**

В 1928 г. известный русский механик С. П. Тимошенко в предисловии к своей книге «Колебания в инженерном деле» писал «с увеличением размеров и скоростей современных машин в инженерных расчетах становится все более и более важным решение задач, связанных с колебаниями». За истекшие годы значение колебаний приобрело еще большее значение в связи с бурным ростом мощностей машин, скоростей движения, появлением новых типов конструкций, обеспечением устойчивости и управляемости. Уже в 1954 г. С. П. Тимошенко с удовлетворением отмечал, что предмет «теория колебаний» вошел почти во все учебные планы подготовки инженеров-механиков. Исследованию колебаний была посвящена обширная литература, как специальная, так и многочисленная учебная, и, как один из разделов, теория колебаний входила во многие руководства по теоретической механике. Начавшаяся в 1960-х гг. компания по сокращению числа часов, отводимых в новых учебных планах на курс теоретической механики, привела к тому, что теория колебаний перешла в разряд дополнительных, предназначенных для самостоятельного изучения дисциплин. Отрицательные последствия такого реформирования очевидны. Во введенных в последние годы новых образовательных стандартах курс теории колебаний вновь стал обязательным предметом при подготовке инженеров-машиностроителей и механиков, стали издаваться новые учебники и пособия. Последнее крайне важно, так как многие издания прошлых лет, не потерявшие своей актуальности, стали библиографической редкостью, и сам предмет претерпевает изменения: исключаются или сокращаются одни разделы, добавляются новые.

Настоящее учебное пособие представляет собой две части курса теории колебаний — линейные колебания систем с сосредоточенными параметрами и нелинейные колебания. Материалом для написания пособия послужил курс лекций, которые автор в течение ряда лет читает на машиностроительных и ракетно-космических факультетах Балтийского государственного технического университета «Военмех». Существующими образовательными стандартами «Теория колебаний» в последние годы введена как обязательная дисциплина в программы подготовки инженеров аэрокосмических и ряда машиностроительных специальностей.

Стремясь по возможности придать изложению прикладной характер, автор полагал целесообразным основные темы курса снабжать примерами, позволяющими глубже вникнуть в существо изучаемых явлений и приобрести навыки

практического решения задач, но ни по своему объему, ни по содержанию приводимые примеры не могут заменить практических или лабораторных работ и курсовых заданий, предусмотренных действующими программами. Для этих целей следует пользоваться сборниками задач и курсовых заданий и соответствующими методическими руководствами.

В процессе преподавания и при работе над пособием автор пользовался многими учебниками и пособиями отечественных и иностранных ученых. Чтобы не загромождать текст ссылками на многочисленные источники, часть из них приведена в подстрочных примечаниях.

Автор выражает глубокую признательность заведующему кафедрой теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского университета профессору П. Е. Товстику и кафедре теоретической механики, теории механизмов и деталей машин (заведующий кафедрой профессор С. К. Слезкинский) за их ценные замечания и рекомендации. Большую помощь при подготовке рукописи оказали Ю. А. Матикс и В. Ю. Чирков, выражаю им искреннюю благодарность.

Автор будет благодарен всем читателям, высказавшим свои замечания и пожелания по адресу: 190005, г. Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, д. 1, БГТУ «Военмех», кафедра теоретической механики и баллистики.

## Содержание

[Предисловие ..... 3](#)

### ЧАСТЬ I. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

[ВВЕДЕНИЕ ..... 5](#)

[1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ..... 12](#)

- 1.1. Устойчивость и неустойчивость положения равновесия и движения системы ..... 12
- 1.2. Критерии устойчивости положения равновесия консервативной системы ..... 16
- 1.3. Кинетическая и потенциальная энергии консервативной материальной системы в окрестности положения устойчивого равновесия. Диссипативная функция Рэлея. Критерий устойчивости ..... 18
- 1.4. Линейное приближение уравнений, описывающих движение вблизи положения равновесия ..... 24

[2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ..... 34](#)

- 2.1. Примеры простейших колебательных систем ..... 34
- 2.2. Свободные колебания системы ..... 40

[3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ..... 49](#)

- 3.1. Колебания системы под действием гармонической силы ..... 50
- 3.2. Анализ вынужденных колебаний ..... 53
- 3.3. Общий случай периодической возмущающей силы ..... 57
- 3.4. Возмущающая сила, изменяющаяся произвольным образом ..... 59
- 3.5. Кинематическое и инерционное возбуждение колебаний ..... 67

[4. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ..... 72](#)

- 4.1. Примеры системы с двумя степенями свободы ..... 72
- 4.2. Свободные колебания системы с двумя степенями свободы ..... 73
- 4.3. Особые случаи (кратные корни, нулевой корень, близкие корни) ..... 77
- 4.4. Нормальные координаты ..... 86
- 4.5. Собственные колебания в системе с двумя степенями свободы при действии трения ..... 88
- 4.6. Вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы ..... 91
- 4.7. Динамический гаситель колебаний. Антирезонанс ..... 95
- 4.8. Вынужденные колебания с вязким затуханием ..... 99

[5. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ..... 101](#)

- 5.1. Свободные колебания в консервативных системах ..... 101
- 5.2. Нормальные координаты ..... 105
- 5.3. Влияние сил сопротивления на свободные колебания ..... ПО
- 5.4. Вынужденные колебания системы ..... 111
- 5.5. Колебания  $N$ -атомной молекулы ..... 113
- 5.6. Колебания в цепочке однородных элементов ..... 120

[6. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ..... 123](#)

- 6.1. Параметрическое воздействие на колебательную систему. Раскачивание качелей ..... 123
- 6.2. Маятник с колеблющейся по вертикали точкой подвеса ..... 129
- 6.3. Влияние демпфирования на устойчивость параметрически возбуждаемых систем ..... 132

[7. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ..... 135](#)

- 7.1. Регистрирующие приборы ..... 135
- 7.2. Элементарная теория амортизации ..... 144

[8. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ОКОЛО СОСТОЯНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ..... 148](#)

- 8.1. Дифференциальные уравнения возмущенного движения системы. Понятие об устойчивости движения ..... 148
- 8.2. Интегрирование уравнений малых колебаний системы в окрестности стационарного движения. Исследование устойчивости по первому приближению ..... 152

**ЧАСТЬ II. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ**

[1. ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО И ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ ..... 6](#)

- 1.1. Динамические системы и их классификация ..... 6
- 1.2. Фазовое пространство и фазовые траектории динамических систем ..... 7
- 1.3. Природа нелинейных сил и их характеристики ..... 10

[2. КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ..... 14](#)

- 2.1. Равновесные положения системы с одной степенью свободы . . 14
- 2.2. Классификация особых точек ..... 16
- 2.3. Нелинейные консервативные системы. Методы построения фазовых траекторий ..... 23
- 2.4. Фазовый портрет математического маятника ..... 30
- 2.5. Бифуркации и бифуркационное значение параметра ..... 33
- 2.6. Катастрофы и аттракторы ..... 36

[3. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ..... 42](#)

- 3.1. Точное интегрирование дифференциальных уравнений движения 42
- 3.2. Точное решение задачи о колебаниях математического маятника 46
- 3.3. Кусочно-линейные уравнения ..... 49

[4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ..... 53](#)

- 4.1. Метод линеаризации нелинейных уравнений ..... 53
- 4.2. Метод малого параметра ..... 58
- 4.3. Применение метода Пуанкаре ..... 62
- 4.4. Метод А.Н. Крылова ..... 65
- 4.5. Асимптотический метод Крылова-Боголюбова ..... 67
- 4.6. Метод прямого разделения движений ..... 72
- 4.7. Метод гармонического баланса ..... 80

[5. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ..... 84](#)

- 5.1. Общие сведения об автоколебаниях ..... 84
- 5.2. Метод медленно меняющихся амплитуд ..... 86
- 5.3. Стационарные режимы ..... 90
- 5.4. Фрикционные автоколебания ..... 94
- 5.5. Флаттер крыла самолета ..... 100
- 5.6. Разрывные (релаксационные) колебания ..... 108

[6. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ..... 115](#)

- 6.1. Вынужденные колебания в нелинейной системе при гармоническом силовом воздействии без затухания ..... 116
- 6.2. Явление скачка ..... 118
- 6.3. Влияние вязкого затухания на гармонические колебания ..... 120
- 6.4. Метод малого параметра Пуанкаре для неавтономных систем . 125
- 6.5. Нерезонансные вынужденные колебания ..... 127
- 6.6. Субгармонические колебания ..... 129
- 6.7. Полигармоническое возмущение ..... 133
- 6.8. Внешнее гармоническое воздействие на автоколебательную систему. Амплитудные кривые при гармоническом воздействии . 137
- 6.9. Устойчивость гармонических колебаний. Явление захватывания 141
- 6.10. Стохастические автоколебания ..... 143