



Шевелев Ю. П., Писаренко Л. А., Шевелев М. Ю.
Сборник задач по дискретной математике
(для практических занятий в группах):
Учебное пособие. 1-е изд.

ISBN 978-5-8114-1359-1

Год выпуска 2013

Тираж 1500 экз.

Формат 16,5×23,5 см

Переплет: твердый

Страниц 528

Цена 1100.00 руб.

В сборнике отражено содержание пяти разделов дискретной математики, таких, как теория множеств, булева алгебра логики, теория конечных автоматов, комбинаторика и теория графов, изложенных в учебном пособии Ю. П. Шевелева «Дискретная математика» (СПб.: Изд-во «Лань», 2008). Для данного сборника это пособие является базовым. Однако базовым может быть и любое другое учебное пособие, где соответствующие темы рассматриваются достаточно полно.

В сборнике 14 глав. Каждая глава состоит из нескольких тем (от 2 до 8). Общее число тем во всех 14 главах равно 54. По каждой теме приведено 50 дидактически эквивалентных заданий. Даны образцы их выполнения. Пятидесяти вариантов заданий достаточно для того, чтобы проводить аудиторские занятия в группах и выдавать индивидуальные задания для самостоятельной работы во внеаудиторное время. Всего в сборнике 7450 задач и 112 вопросов. Предусмотрено два вида контроля: автоматизированный и при помощи открытых ответов (они приведены ко всем задачам и вопросам).

Для студентов технических специальностей вузов и техникумов.

Предисловие

При изучении дискретной математики вопросы и задачи играют важнейшую роль. Ими закрепляется пройденный теоретический материал, задается глубина его усвоения и обеспечивается возможность непрерывного контроля учебного процесса. Поэтому большинство авторов учебных пособий по дискретной математике не ограничиваются одними теоретическими сведениями, и в конце каждой главы, а иногда и после каждого подраздела (параграфа) приводят перечни вопросов и задач, позволяющих глубже изучить соответствующие темы.

Если обучающийся индивидуально работает над материалом пособия, то содержащихся в нем вопросов и задач в большинстве случаев вполне достаточно. Иное дело практические занятия с группой студентов. Если ориентироваться только на традиционную методику, когда преподаватель вызывает к доске кого-либо из студентов и с ним решает задачу, а вся группа следит за ходом ее решения, то вполне можно ограничиться только теми задачами, которые приводятся в существующих пособиях. Однако подобная методика хотя и проста и необременительна для преподавателя (провел занятия — и свободен), но недостаточно эффективна с точки зрения качества обучения, так как на подобных занятиях активны только те студенты, которые работают у доски. Остальным же нет необходимости активизировать интеллект, поэтому они находятся в состоянии созерцательности, т. е. занимают позицию пассивного наблюдателя.

Очевидно, что для повышения эффективности обучения каждому студенту необходимо выдать индивидуальное задание, причем все задания должны быть неповторными, чтобы активно работали все студенты. Идея этой методики не нова, но массовостью применения в учебном процессе она до сих пор не отличается, так как для ее практической реализации необходимо преодолеть две главные трудности.

Во-первых, откуда брать задачи для подготовки десятков вариантов индивидуальных заданий? Это очень трудный вопрос, особенно если учесть, что над индивидуальными заданиями студенты должны работать на каждом занятии, а если аудиторного времени недостаточно, то по некоторым темам подобные задания должны быть выданы и для домашней работы. В существующих изданиях этот аспект отражен крайне слабо. Содержащиеся в них задачи представлены, как правило, в одном варианте каждая. Лишь изредка встречаются учебные пособия, например [1, 4, 5, 43], где по некоторым темам приводятся задачи с одинаковыми формулировками, но с различными исходными данными. В частности О. Е. Акимов в [1] сформулировал 15 таких задач. Из них 7 — по логике Буля, 3 — по логике высказываний и 5 — по логике предикатов, при этом каждая из 15 задач представлена 24 вариантами. В [43] приведен раздел под

названием «Контрольные работы». В этом разделе все задания состоят из 20 неповторяющихся вариантов. Однако, как показывает опыт, для эффективного проведения самостоятельной работы количество вариантов заданий необходимо увеличить не менее чем в два раза.

Во-вторых, каждое выполненное студентами задание должно быть проверено и оценено в какой-либо системе (иначе студенты работать над заданиями не будут). Это также очень непростая задача. Ручная проверка слишком трудоемка, на нее требуется неприемлемо много времени: столько же, сколько и на проведение занятий, а во многих случаях и более. Обычно в подобных случаях рекомендуется применять технические средства контроля: компьютеры или специализированные устройства. Однако автоматизация контроля предъявляет особые требования к формулировкам задач. Каждая задача должна быть так сформулирована, чтобы обеспечивалось однозначное представление ответа. Это требование почти полностью исключает возможность подготовки индивидуальных заданий на основе существующих учебных пособий, так как их авторы не учитывали требования компьютеризации. Например, в [4] по различным разделам комбинаторики приведено 536 задач. На первый взгляд такого числа вполне достаточно для подготовки 30–40 вариантов заданий. Но большинство формулировок этих задач таковы, что автоматизированный контроль ответов либо вообще невозможен (в основном это задания типа: докажите, что...), либо трудно реализуем из-за неоднозначности ответов и громоздкости их представления. А оставшихся задач, т. е. поддающихся компьютерному контролю, недостаточно для того, чтобы составить из них необходимое количество заданий одинаковой дидактической сложности. В [5] по основным разделам дискретной математики содержится более тысячи задач. Но среди них доминируют задачи на доказательство, которые с позиций автоматизации обучения интереса не представляют.

Таким образом, для повышения эффективности обучения необходимо не только подготовить достаточное количество задач, но и сформулировать их так, чтобы обеспечивалась возможность компьютерной проверки правильности ответов. Эти два требования составили основу при разработке данного сборника задач.

В отличие от существующих публикаций по дискретной математике данный сборник изначально ориентирован на аудиторские занятия не только с отдельными студентами, но и с группами студентов. В нем отражено содержание пяти разделов дискретной математики, таких, как теория множеств, булева алгебра логики, теория конечных автоматов, комбинаторика и теория графов, изложенных в учебном пособии [43], которое является базовым для данного сборника. Материал этих пяти разделов представлен 14 главами. Каждая глава состоит из нескольких тем (от 2 до 8). Общее число тем равно 54. По каждой теме приведено 50 дидактически эквивалентных заданий, причем большинство из них содержат несколько задач (например, число задач в каждом задании по комбинаторике равно 8, по комбинаторике в теории вероятностей — 6). Пятидесяти вариантов заданий вполне достаточно для того, чтобы не только проводить аудиторские занятия в группах, причем практически с любым количественным составом (в пределе — до 50 человек в группе), но и выдавать индивидуальные задания для самостоятельного их выполнения во внеаудиторное время, т. е. для домашней работы.

Варианты заданий, относящиеся к одной и той же теме, по трудоемкости их выполнения мало отличаются одно от другого, но задания из разных тем по трудозатратам не все одинаковы. Например, на решение задач из таких тем, как «Нормальные формы булевых функций», «Эйлеровы графы», «Кодирование деревьев методом Пруфера» при хорошо усвоенной теории достаточно 15–20 минут. На выполнение заданий по другим темам может потребоваться гораздо больше времени. Например, решить все 8 задач из заданий по комбинаторике за два академических часа студенты обычно не успевают. В таких случаях следует выдавать задания с требованием частичного их выполнения. При дефиците аудиторного времени задания можно сократить и до одной задачи из каждой темы, и перенести основной объем работ на внеаудиторные занятия, выдав всем студентам индивидуальные задания без сокращения их объемов.

Теоретический материал, относящийся к индивидуальным заданиям, студенты могут получить, прежде всего, из своих лекционных конспектов, а при их отсутствии — из учебного пособия [43]. Минимально необходимую информацию студенты найдут и в самом сборнике, где перед каждой темой приведены соответствующие теоретические сведения, такие, как понятия, определения, теоремы, формулы, и др. и показаны образцы решения задач. В принципе можно пользоваться любыми учебниками и учебными пособиями по дискретной математике, если соответствующие темы в них изложены достаточно полно. При этом необходимо иметь в виду, что система понятий, определений и обозначений в современной дискретной математике является крайне неустоявшейся.

И другие логические операции (дизъюнкции, конъюнкции, неравнозначно, импликация) в различных публикациях могут иметь неодинаковые обозначения. Это значит, что прежде чем решать задачи из сборника, пользуясь не соответствующим ему учебником, необходимо сначала определить все расхождения в обозначениях и понятиях, сопоставить их с обозначениями, принятыми в сборнике, и лишь затем приступать к решению задач.

Данный сборник, как и учебное пособие [43], входит в дидактический фонд системы «Символ», основанной на идее интеграции электронных и традиционных (полиграфически издаваемых) учебников. Электронная составляющая сборника представлена возможностью автоматизации контроля и самоконтроля с применением компьютеров, а при их отсутствии — специализированных устройств «Символ-Тест» (разработка ТУСУРа), обеспечивающих возможность проведения занятий в режиме оперативного самоконтроля с любым числом студентов в группе и в любом помещении.

Главная особенность, отличающая систему «Символ» от других разработок того же назначения, состоит в том, что массивы эталонной информации рассредоточены по отдельным задачам, каждой из которых ставится в соответствие определенный код задания в виде упорядоченной последовательности нескольких шестнадцатеричных цифр (чаще всего это 2–4 знака). В коде задания представлен не эталон правильного ответа, а критерий, на основе которого ответ оценивается дихотомически по принципу «Правильно–неправильно» (дихотомия — от греч. *dichotomia* — разделение надвое [31]). Благодаря дихотомическому принципу оценки ответов любая, даже самая простая задача становится дидактически состоятельной. Всего в сборнике насчитывается 7450 кодов.

Действия при самоконтроле крайне просты. Студент, желающий узнать, верным ли является найденный им ответ, набирает на клавиатуре компьютера или устройства «Символ-Тест» ответ и код задания. Получив сообщение

«Неправильно», он продолжает работу над задачей, находит новый ответ и снова обращается к техническим средствам. После нескольких итераций студент либо найдет правильный ответ, либо обратится за помощью к преподавателю. В системе «Символ» предусмотрен режим работы, когда вся информация, набираемая на клавиатурах компьютера или устройства «Символ-Тест», автоматически фиксируется в электронном журнале.

Благодаря автоматизации самоконтроля не только повышается активность студентов, но и возрастает отдача труда преподавателя, так как на занятиях, где все студенты самостоятельно работают над своими заданиями, обеспечивается возможность индивидуальных бесед преподавателя с теми студентами, которые не могут правильно решить задачу. При этом в целом трудозатраты преподавателя остаются теми же, что и в случае традиционной образовательной системы, где доминирующей является работа студентов у доски.

Коды заданий приведены ко всем задачам сборника. Этим обеспечивается возможность работы в режиме самоконтроля над каждой задачей. Однако кроме кодов заданий решено привести и открытые ответы. Такое решение объясняется тем, что автоматизация самоконтроля в учебных заведениях России массовостью пока не отличается, а благодаря открытым ответам самоконтроль обеспечивается и при отсутствии технических контролирующих средств, хотя и со сниженной дидактической эффективностью по сравнению с автоматизированным дихотомическим принципом оценки ответов. Разумеется, и в этом случае возможно существенное повышение качества обучения, если в индивидуальном плане работы преподавателя предусмотреть проверку выполнения самостоятельной работы студентов.

В большинстве случаев задачи сборника являются авторскими, но при подборе дидактического материала использовались и литературные источники, приведенные в библиографическом списке. Из них выбирались не сами задачи, а только темы, поэтому ссылки на источники не приведены. По темам выбранных задач формулировались их варианты с различными исходными данными и с учетом возможностей автоматизированного самоконтроля.

В основном задачи, включенные в сборник, отличаются умеренной сложностью, так как и данный сборник, и базовое пособие [43] рассчитаны на студентов, впервые знакомящихся с дискретной математикой.

Сборник прошел апробацию в Томском государственном университете систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР) во время аудиторных занятий по дискретной математике с несколькими группами студентов (всего более 100 человек). Занятия проводились с применением устройств «Символ-Тест». Как и ожидалось, благодаря индивидуальным заданиям активно работали все. В результате апробации были уточнены формулировки заданий, показавшиеся некоторым студентам недостаточно четкими, и удалены те задачи, которые никому не удалось решить без помощи преподавателя.

Завершим предисловие замечанием о государственном образовательном стандарте (ГОС). В сборник включены наиболее важные в прикладном отношении темы, которые находят отражение и в ГОС. Хотя стандарты периодически обновляются, но на прикладных аспектах изменения скорее всего не отразятся. Поэтому можно надеяться, что дидактические материалы сборника будут востребованы и в дальнейшем при разработке учебных планов, основанных на обновленных государственных образовательных стандартах.

Шевелев Ю. П., Писаренко Л. А., Шевелев М. Ю.

Сборник задач по дискретной математике

(для практических занятий в группах):

Учебное пособие. 1-е изд.

Содержание

[Предисловие 5](#)

[1. Элементы теории множеств 10](#)

1.1. Основные операции над множествами 10

1.2. Подмножества 18

1.3. Диаграммы Венна 30

1.4. Отношения включения 38

[2. Булевы функции 43](#)

2.1. Нормальные формы булевых функций 43

2.2. Разложение булевых формул по теореме Шеннона 57

2.3. Совершенные дизъюнктивные нормальные формы булевых функций 63

2.4. Метод Квайна. Сокращенные ДНФ 70

2.5. Метод Петрика 75

2.6. Сокращенные КНФ 82

[3. Применение карт Вейча для минимизации булевых формул 87](#)

3.1. Минимизация в классе ДНФ булевых функций, заданных в СДНФ 87

3.2. Минимизация в классе КНФ булевых функций, заданных в СДНФ 96

3.3. Минимизация в классе нормальных форм 101

3.4. ДНФ, КНФ и формы высших порядков 106

3.5. Минимизация в классе ДНФ с учетом неопределенных состояний 117

3.6. Минимизация в классе КНФ с учетом неопределенных состояний 125

[4. Симметрические булевы функции 134](#)

4.1. Распознавание симметрических булевых функций 134

4.2. Операции над симметрическими функциями	148
<u>5. Алгебра Жегалкина</u>	<u>151</u>
5.1. Операция «неравнозначно» (сумма по модулю 2)	151
5.2. Представление булевых формул в виде полинома Жегалкина	163
5.3. Представление полинома Жегалкина в минимальной ДНФ	167
<u>6. Операция импликации</u>	<u>175</u>
6.1. Преобразование формул, содержащих операцию импликации	175
6.2. Тавтологии	178
<u>7. Булевы дифференциальное и интегральное исчисления</u>	<u>186</u>
7.1. Остаточные функции	186
7.2. Дифференцирование булевых функций подстановкой наборов значений переменных	195
7.3. Аналитическое дифференцирование булевых функций	199
7.4. Интегрирование булевых функций	202
<u>8. Функциональная полнота системы булевых функций (теорема Поста)</u>	<u>206</u>
8.1. Функционально замкнутые классы булевых функций	206
8.2. Функционально полные системы	227
<u>9. Числовое представление булевых функций</u>	<u>254</u>
9.1. Изображающие числа булевых функций	254
9.2. Минимизация в классе ДНФ булевых функций, заданных изображающими числами	259
9.3. Решение булевых уравнений с помощью изображающих чисел	261
<u>10. Пороговые функции</u>	<u>270</u>
10.1. Представление пороговых функций в виде ДНФ	270
10.2. Представление пороговых функций в виде КНФ	272
<u>11. Комбинационные схемы</u>	<u>274</u>
11.1. Диодно-резисторные схемы — основа логических элементов	274
11.2. Синтез комбинационных схем	281
11.3. Синтез комбинационного преобразователя кодов	288
11.4. Анализ логических схем	291
11.5. Анализ преобразователя двоичных кодов	304
11.6. Логические схемы на элементах Шеффера	307
<u>12. Многоактные автоматы</u>	<u>311</u>
12.1. Асинхронный автомат на триггерах типа Т	311
12.2. Синтез синхронных автоматов на Т-триггерах	315
12.3. Синтез синхронных автоматов на JK-триггерах	319
12.4. Анализ синхронного автомата, построенного на JK-триггерах	324
<u>13. Комбинаторика</u>	<u>330</u>
13.1. Задачи на применение основных формул комбинаторики	330
13.2. Комбинаторика в теории вероятностей	369
<u>14. Теория графов</u>	<u>395</u>
14.1. Матрица смежности неориентированного графа	395
14.2. Матрица инцидентности	409
14.3. Эйлеровы графы	422
14.4. Двойственные графы	449
14.5. Нахождение всех простых цепей, соединяющих две вершины графа	452
14.6. Простые цепи в ориентированном графе	458
14.7. Кодирование деревьев методом Пруфера	464
14.8. Построение дерева по его коду	471
<u>15. Дополнительные вопросы</u>	<u>477</u>
15.1. Теория множеств	477
15.2. Алгебра логики (булева алгебра)	478
15.3. Теория конечных автоматов	479
15.4. Комбинаторика	479
15.5. Теория графов	480
<u>Ответы</u>	<u>481</u>
<u>Литература</u>	<u>517</u>
